Soluciones fase local OME curso 2018/19

Alejandro Miralles Montolío

PRIMER DÍA

1. Para cada n´umero de cuatro cifras $\overline{abcd}$, denotamos por S al n´umero $S = \overline{abcd} - \overline{dcba}$. Demuestra que S es m´ultiplo de 37 si y s´olo si las dos cifras centrales del n´umero $\overline{abcd}$ son iguales.

   Solución. Escribimos el número como $\overline{abcd}$ como $1000a+100b+10c+d$ y el número $\overline{dcba}$ como $1000d+100c+10b+a$. Por tanto,

   $$S = \overline{abcd} - \overline{dcba} = 1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = \\ 999(a-d) + 90(b-c) = 37 \cdot 3^3(a-d) + 2 \cdot 5 \cdot 3^2(b-c).$$

   El primer sumando es obviamente múltiplo de 37. El segundo sumando no tiene el factor 37 ya que éste es un número primo y $|b-c| \leq 9$. Por tanto, S será múltiplo de 37 si y sólo si $b-c=0$, es decir, si y sólo si $b=c$.

2. Demuestra que para todo $n \geq 2$ podemos encontrar n números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n \neq 1$ de manera que los productos

   $$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{1}{1-x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x_n}$$

   son iguales.

   Solución. Dado $x \neq 1$, notemos que la ecuación

   $$x = \frac{1}{1-x} \Longleftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

   no tiene soluciones reales. Sin embargo, dados $x, y \neq 1$,

   $$x \cdot y = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y}$$

tiene una solución sencilla ya que

$$x \cdot y = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{y-1}$$

y las ecuaciones

$$x = \frac{1}{x-1} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{y-1} \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{e} \quad y^2 - y - 1 = 0$$

sí tienen solución

$$x = y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto, si n es un número par, podemos agrupar de dos en dos cada término de cada producto y utilizar lo anterior, encontrando las soluciones

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

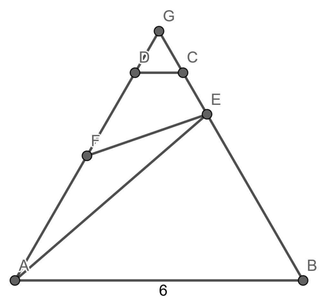
Si $n = 3$, consideramos, por ejemplo, $x_1 = x_2 = 2$. La igualdad del enunciado nos lleva a la ecuación

$$4x_3 = \left(\frac{1}{1-2}\right)^2 \frac{1}{1-x_3} = \frac{1}{1-x_3} \Longleftrightarrow 4x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$$

que da la solución $x_3 = \frac{1}{2}$. Así, obtenemos $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, \frac{1}{2})$. Si n es cualquier impar mayor que 3, basta con completar estos tres valores con un número par de valores de los x_k utilizando el caso par anterior.

3. El trapecio isósceles $ABCD$ tiene lados paralelos AB y CD. Sabemos que $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 5$ y $\angle DAB = 60^o$. Se lanza un rayo de luz desde A que rebota en CB en el punto E e interseca en AD en el punto F. Si $AF = 3$, calcula el ´area del tri´angulo AFE.

   Solución. Puesto que el trapecio es isósceles y $\angle DAB = 60^o$, podemos alargar los lados AD y BC que intersectan en G, formando así un triángulo equilátero ABG.



Llamando $\alpha = \angle EAB$, tendremos que $\angle AEB = 120 - \alpha$. Como el rayo sale simétricamente del lado BC, tendremos que $\angle GEF = 120 - \alpha$ y, por tanto,

$$\angle FEA = 180 - 2(120 - \alpha) = 2\alpha - 60.$$

Como $\angle FAE = 60 - \alpha$, tendremos que $\angle AFE = 180 - \alpha$ y entonces $\angle GFE = \alpha$. Esto demuestra que los triángulos GFE y BAE son semejantes. Llamando $x = \overline{GE}$, tendremos que $\overline{EB} = 6 - x$. Como $\overline{FG} = \overline{AG} - \overline{AF} = 6 - 3 = 3$, tendremos por la semejanza de triángulos que

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{6 - x} \Longleftrightarrow 18 - 3x = 6x \Longleftrightarrow 9x = 18$$

de donde obtenemos que $x = 2$ y, por tanto, $\overline{GE} = 2$ y $\overline{EB} = 4$. Tendremos

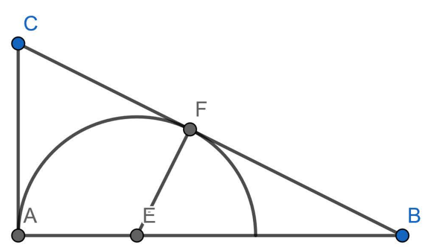
$$AB/GF = 6/3 = 2 \Longrightarrow \text{Área}(BAE)/\text{Área}(GFE) = 2^2 = 4.$$

El área del triángulo AFE se puede calcular, por ejemplo,

$$\text{Área}(AFE) = \text{Área}(AGB) - \text{Área}(GFE) - \text{Área}(AEB) =$$
$$\text{Área}(AGB) - 5\text{Área}(GFE) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 60 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \operatorname{sen} 60 =$$
$$(18 - 15)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

SEGUNDO DÍA

4. Sea $p \geq 3$ un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor $p^2 - 1$ y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa **y al cateto menor** del triángulo. Encuentra los valores de p para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.
   Solución. En el triángulo rectángulo ABC, consideramos $\overline{AB} = p^2 - 1$, $\overline{AC} = 2p$.



Por el Teorema de Pitágoras, tendremos que $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$, así que

$$\overline{BC}^2 = (2p)^2 + (p^2 - 1)^2 = 4p^2 + p^4 - 2p^2 + 1 = p^4 + 2p^2 + 1 = (p^2 + 1)^2$$

de donde obtenemos que $\overline{BC} = p^2 + 1$.

Llamando r al radio del semicírculo, E el centro del círculo que está en el lado AB y F el punto de tangencia del semicírculo con el lado BC, tendremos que $\overline{AE} = \overline{EF} = r$. Por una parte, el área del triángulo ABC viene dada por

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (p^2 - 1)p.$$

Por otra,

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(AEC) + \text{Área}(ECB) = \frac{1}{2}\overline{AE} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{EF} =$$

$$\frac{1}{2}r \cdot 2p + \frac{1}{2}(p^2 + 1) \cdot r = \frac{r}{2}(p^2 + 2p + 1) = \frac{r}{2}(p + 1)^2.$$

Igualando las dos expresiones para el área del triángulo ABC, obtenemos que

$$\frac{r}{2}(p + 1)^2 = (p^2 - 1)p$$

de donde

$$r = \frac{(p^2 - 1)2p}{(p + 1)^2} = \frac{2p(p - 1)}{p + 1}.$$

Es un cálculo sencillo comprobar que

$$2p - 4 < \frac{2p(p - 1)}{p + 1} < 2p$$

así que las únicas posibilidades para r son $2p - 1$, $2p - 2$ y $2p - 3$.

- Si $r = 2p - 1$, entonces

  $$2p - 1 = \frac{2p(p - 1)}{p + 1} \Longrightarrow 2p^2 + 2p - p - 1 = 2p^2 - 2p \Longrightarrow p = 1/3$$

- Si $r = 2p - 2 = 2(p - 1)$, entonces

  $$2(p - 1) = \frac{2p(p - 1)}{p + 1} \Longrightarrow 1 = \frac{2p}{p + 1} \Longrightarrow p = 1$$

- Si $r = 2p - 3$, entonces

  $$2p - 3 = \frac{2p(p - 1)}{p + 1} \Longrightarrow 2p^2 + 2p - 3p - 3 = 2p^2 - 2p \Longrightarrow p = 3$$

Por tanto, la única solución válida es $p = 3$, lo que nos da el valor de $r = 3$.

5. ¿Existen m, n números naturales de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

es un número primo?

Solución. Tratamos de factorizar la expresión del enunciado. Igualando esta expresión a 0, tendremos

$$n^2 + (2018m + 1)n + 2019m - 2019m^2 = 0$$

que podemos tratar como una ecuación en la variable n, obteniendo que

$$n = \frac{-(2018m + 1) \pm \sqrt{(2018m + 1)^2 - 4(2019m - 2019m^2)}}{2}.$$

La expresión dentro de la raíz viene dada por

$$\begin{aligned}(2018m + 1)^2 - 4(2019m - 2019m^2) =\\ 2018^2m^2 + 2 \cdot 2018m + 1 - 4 \cdot 2019m + 4 \cdot 2019m^2 =\\ (2018^2 + 4 \cdot 2018 + 4)m^2 - 2m + 1 = 2020^2m^2 - 2m + 1 = (2020m - 1)^2\end{aligned}$$

así que

$$n = \frac{-(2018m + 1) \pm (2020m - 1)}{2}$$

y, entonces, las soluciones son

$$n_1 = \frac{2m - 2}{2} = m - 1$$

y

$$n_2 = \frac{-4038m}{2} = -2019m.$$

Por tanto, podemos factorizar la expresión del enunciado como

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2 = (n + 2019m)(n - m + 1).$$

En este producto, el primer factor es obviamente mayor que 1. Una condición necesaria para que esta expresión sea un número primo es que $n - m + 1 = 1$, es decir, $n = m$. En este caso, el primer factor queda de la forma $n + 2019m = 2020n$, que es un número compuesto ya que 2020 lo es. Por tanto, la expresión del enunciado no será un número primo para ningún valor de n y de m naturales.

6. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Fijémonos que una solución trivial es $P(x) = 0$ para cualquier valor de $k \geq 1$.

Para encontrar otras soluciones, fijamos primero $k = 1$. En ese caso, la ecuación queda

$$P(x) - P(x) = xP(x),$$

por lo que $P(x) = 0$, que es la solución anterior.

Si $k \geq 2$ y $P(x)$ es una constante c, tendremos que $c - c = x^k c$ y, por tanto, $cx^k = 0$, imposible a menos que $c = 0$, que nos da el polinomio trivial $P(x) = 0$ de nuevo.

Supongamos pues que $k \geq 2$ y que el grado del polinomio es $n \geq 1$. Es obvio que $P(x^k)$ tendrá grado nk y $P(2x)$ tendrá grado n, así que el término de la izquierda de la igualdad será un polinomio de grado nk ya que $k \geq 1$. El término de la derecha será un polinomio de grado $n + k$, así que tendremos que $nk = n + k$, de donde $k(n-1) = n$ y, por tanto,

$$k = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Como k es un número natural, tendremos que necesariamente $n = 2$ y, por tanto, $k = 2$. Escribimos pues $P(x) = ax^2 + bx + c$ y, sustituyendo en la ecuación, obtenemos:

$$ax^4 + bx^2 + c - (4ax^2 + 2bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

y simplificando obtenemos $(b - 4a)x^2 = bx^3 + cx^2$, de donde necesariamente obtenemos que $b = 0$ y $c = -4a$. Así pues, los polinomios cumpliendo la propiedad del enunciado serán todos los de la forma $P(x) = a(x^2 - 4)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

En resumen, para todo $k \geq 1$, una solución es $P(x) = 0$. En el caso $k = 2$, los polinomios de la forma $P(x) = a(x^2 - 4)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ también son solución.

TERCER DÍA

7. Considera el conjunto de números **enteros positivos** n cumpliendo que $1 \leq n \leq 1000000$. En ese conjunto, indica si es mayor la cantidad de números que pueden expresarse de la forma a^3+mb^2, con $a, b \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ la cantidad de números que no pueden expresarse de esa manera.

   Solución. Como $0 \leq a^3, b^2 \leq a^3 + mb^2 \leq 1000000$, tendremos que $0 \leq a \leq 100$ y $0 \leq b \leq 1000$. Para $m = 0$, tenemos que $a^3 + mb^2 = a^3$ y la cantidad de números de esa forma será 100. Para cada $m = 2, 4, 6, 8$, la cantidad de números será menor o igual que $100 \cdot 1000 = 100000$. Por tanto, habrá, a lo sumo, $100 + 4 \cdot 100000 = 400100$ números de la forma $a^3 + mb^2$ con las condiciones del enunciado. Por tanto, habrá más números que no pueden expresarse de esa manera.

8. Prueba que para todo $a, b, c > 0$ se cumple que

$$\frac{a^2}{b^3c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}.$$

   ¿En qué caso se cumple la igualdad?

   Solución. Multiplicando por ab^3c toda la desigualdad para eliminar los denominadores, tendremos que

$$a^3 - a^2bc \geq ac^2b^2 - c^3b^3 \iff a^3 - ac^2b^2 \geq a^2bc - c^3b^3 \iff$$

$$a^2(a - bc) \geq c^2b^2(a - bc) \iff (a^2 - b^2c^2)(a - bc) \geq 0.$$

   Como la función $f(x) = x^2$ es creciente, tendremos que los dos términos del producto de la izquierda deben tener el mismo signo, así que la desigualdad es cierta. La igualdad se dará si y sólo si $a - bc = 0$, es decir, si $a = bc$.

9. Consideramos un triángulo ABC y un punto D en el lado AC. Si $\overline{AB} = \overline{DC} = 1$, $\angle DBC = 30^o$ y $\angle ABD = 90^o$, calcula el valor de $\overline{AD}$.

Solución. Llamando $\angle ADB = \alpha$, tendremos que $\angle BDC = 180 - \alpha$. Utilizando el teorema de los senos en el triángulo ADB tenemos que

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{BD}{\sin(90-\alpha)}$$

y en el triángulo DBC tendremos que

$$\frac{1}{\sin 30} = \frac{BD}{\sin(\alpha - 30)} = \frac{BC}{\sin(180-\alpha)}$$

De las primeras igualdades deducimos que $BD = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ y de la segunda que

$$BD = \frac{\sin(\alpha-30)}{\sin 30} = 2\sin(\alpha - 30) = 2(\sin\alpha\cos 30 - \cos\alpha\sin 30)$$

y así, $BD = \sqrt{3}\sin\alpha - cos\alpha$. Igualando tenemos

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3}\sin\alpha - cos\alpha \ \Rightarrow \ \cos\alpha = \sqrt{3}\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$$

de donde $\cos\alpha(1+\sin\alpha) = \sqrt{3}\sin^2\alpha$ y, elevando al cuadrado y denotando por $t = \sin\alpha$, $(1-t^2)(1+t)^2 = 3t^4$, de donde $4t^4+2t^3-2t-1 = 0$ y, factorizando, $2t^3(2t+1)-(2t+1) = 0$. Por tanto, $(2t^3-1)(2t+1) = 0$ y, por tanto, tenemos dos opciones: Si $2t+1 = 0$, entonces $t = -\frac{1}{2}$ y $x = 1/t = -2$, imposible. Por tanto, $2t^3 - 1 = 0$, así que $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ y deducimos que $x = \sqrt[3]{2}$.